

Reconstruction des données frontière le cas : des équations de Stokes

Hamdi Houichet

Faculté de science de Tunis

École nationale d'ingénieurs de Tunis.

Soutenance de Mastère

Le 04 septembre 2014



Encadrée par :
Faten Khayat



- 1 Introduction
- 2 Résolution de problème de Cauchy complet
- 3 Résolution de Problème de Cauchy incomplet
- 4 Résultats numériques
 - Solution analytique
 - Solution bruitée
- 5 Conclusion et perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Résolution de problème de Cauchy complet
- 3 Résolution de Problème de Cauchy incomplet
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

- Les applications des problèmes inverses se trouvent dans plusieurs domaines scientifiques :
 - ▶ La géodésie : La terre ...
 - ▶ La sismologie : tremblements de terre...
 - ▶ Imagerie médicale : Tissus organiques, EEG,IRM...
- On peut envisager divers problèmes inverses ;
 - ▶ Identification de paramètre.
 - ▶ La détection acoustique.
 - ▶ La recherche de forme ou de frontière.

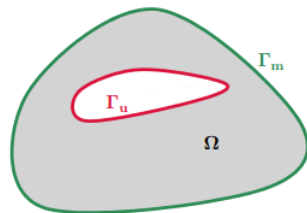


Figure : Domaine d'étude

Présentation du problème

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_m \cup \bar{\Gamma}_u$ et $\Gamma_m \cap \Gamma_u = \emptyset$

Problème de Cauchy

l'équation de Stokes est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = T & \text{sur } \Gamma_m \\ \sigma(u) \cdot n = \phi & \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right. \quad (1)$$

où $(T, \phi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_m)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_m)$ et $\sigma(u)$ est le tenseur de contrainte qui est défini par :

$$\sigma(u) = \frac{1}{2} \nu D(u) - pI$$

ν : La viscosité.

$D(u)$ est donné par :

$$D(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T)$$

Présentation du problème

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_m \cup \bar{\Gamma}_u$ et $\Gamma_m \cap \Gamma_u = \emptyset$

Problème de Cauchy

l'équation de Stokes est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = T & \text{sur } \Gamma_m \\ \sigma(u) \cdot n = \phi & \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right. \quad (1)$$

où $(T, \phi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_m)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_m)$ et $\sigma(u)$ est le tenseur de contrainte qui est défini par :

$$\sigma(u) = \frac{1}{2} \nu D(u) - pI$$

ν : La viscosité.

$D(u)$ est donné par :

$$D(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T)$$

Objectif



Détermination de la vitesse et de la contrainte sur la partie inaccessible Γ_u .

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 **Résolution de problème de Cauchy complet**
- 3 Résolution de Problème de Cauchy incomplet
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Complétion de données



A Ben Abda, I Ben Saad et H Maatoug (2011).

Le problème de Cauchy (1) peut s'écrire comme un problème de complétion de données :

On cherche $(\tau^*, \eta^*) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_u) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u)$

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans} & \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans} & \Omega \\ u = T, \sigma(u) \cdot n = \phi & \text{sur} & \Gamma_m \\ u = \tau^*, \sigma(u) \cdot n = \eta^* & \text{sur} & \Gamma_u \end{array} \right. \quad (2)$$

Complétion de données



A Ben Abda, I Ben Saad et H Maatoug (2011).

Le problème de Cauchy (1) peut s'écrire comme un problème de complétion de données :

On cherche $(\tau^*, \eta^*) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_u) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = T, \sigma(u) \cdot n = \phi & \text{sur } \Gamma_m \\ u = \tau^*, \sigma(u) \cdot n = \eta^* & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right. \quad (2)$$

Problème de Dirichlet

$$(P_D) \left\{ \begin{array}{ll} \nu \Delta u_D + \nabla p_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_D = T & \text{sur } \Gamma_m \\ \sigma(u_D) \cdot n = \eta & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right.$$

Problème de Neumann

$$(P_N) \left\{ \begin{array}{ll} \nu \Delta u_N + \nabla p_N = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u_N = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_N = \tau & \text{sur } \Gamma_u \\ \sigma(u_N) \cdot n = \phi & \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right.$$

Minimisation du problème

Les données manquantes sur Γ_u peuvent être caractérisées par :

Problème de minimisation

$$(\tau^*, \eta^*) = \arg \min_{(\tau, \eta)} E(\tau, \eta)$$

où E est la Fonctionnelle de type énergie

$$\begin{aligned} E(\tau, \eta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_D(\tau, \eta) - u_N(\tau, \phi)) : \nabla(u_D(\tau, \eta) - u_N(\tau, \phi)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (\eta - \sigma(u_N) \cdot n)(u_D - \tau) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_m} (\sigma(u_D) \cdot n - \phi)(\tau - u_N) ds \end{aligned}$$

Calcul du gradient de E

Gradient de la fonctionnelle E

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \eta} \cdot \psi &= - \int_{\Gamma_u} v_D \cdot \psi & \forall \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u)^n \\ \frac{\partial E}{\partial \tau} \cdot h &= - \int_{\Gamma_u} (\eta - \sigma(u_N) \cdot n - \sigma(v_N) \cdot n) \cdot h & \forall h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_u)^n \end{aligned}$$

où (v_D, p_D) et (v_N, q_N) sont respectivement les solutions des deux problèmes adjoints suivants :

Problème Adjoint A_D

$$A_D \begin{cases} -\nu \Delta v_D + \nabla q_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_D = 0 & \text{sur } \Gamma_m \\ \sigma(v_D) \cdot n = \sigma(u_N) \cdot n - \eta & \text{sur } \Gamma_u \end{cases}$$

Problème Adjoint A_N

$$A_N \begin{cases} -\nu \Delta v_N + \nabla q_N = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v_N = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_N = 0 & \text{sur } \Gamma_u \\ \sigma(u_N) \cdot n = \sigma(u_D) \cdot n - \phi & \text{sur } \Gamma_m \end{cases}$$

- L'étude numérique est effectuée sur une couronne de rayon extérieur $R = 2$ et de rayon intérieur $r = 1$.

Test N° 1 : Solution analytique

$$\begin{cases} u_1(x, y) = 4y^3 - x^2 \\ u_2(x, y) = 4x^3 + 2xy - 1 \\ p(x, y) = 24xy - 2x \end{cases}$$

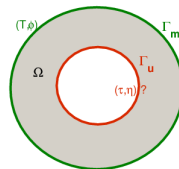
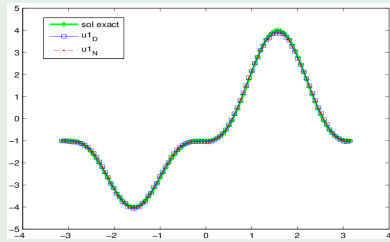


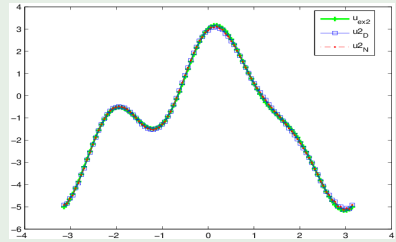
Figure : Une Couronne

Premier test

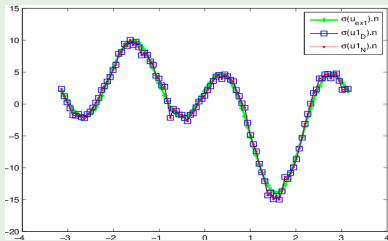
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



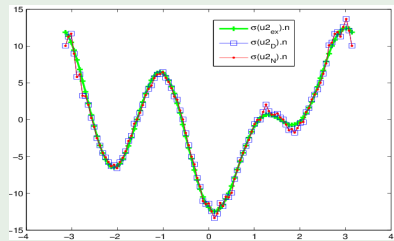
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



La reconstruction de première composante de tenseur des contraintes sur Γ_u



La reconstruction de deuxième composante de contrainte normale sur Γ_u



deuxième test

Test N° 2 : Solution singulière

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 + y^2} \\ u_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \\ p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \end{array} \right.$$

deuxième test

Test N° 2 : Solution singulière

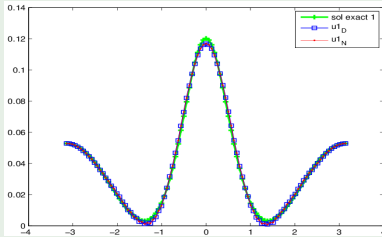
$$\begin{cases} u_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 + y^2} \\ u_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \\ p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \end{cases}$$

On distingue deux cas :

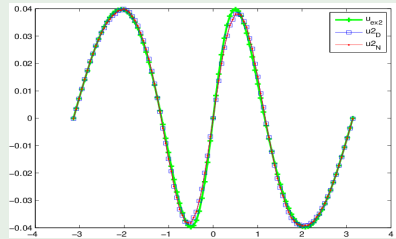
- $a = 0.4$ (loin de Γ_u)
- $a = 0.8$ (proche de Γ_u)

Première cas $a=0.4$

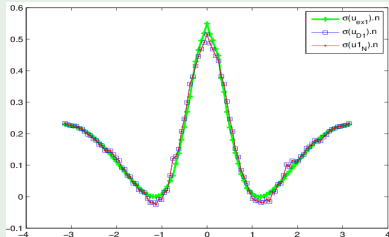
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



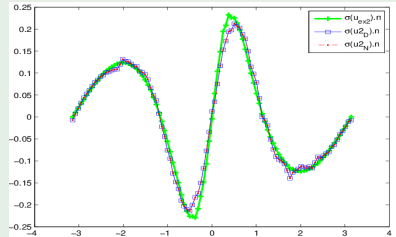
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



La reconstruction de première composante de la contrainte normale sur Γ_u

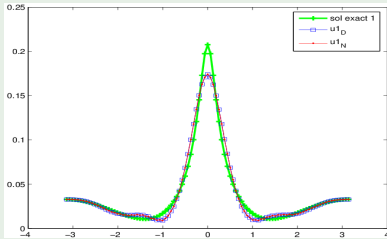


La reconstruction de deuxième composante de la contrainte normale sur Γ_u

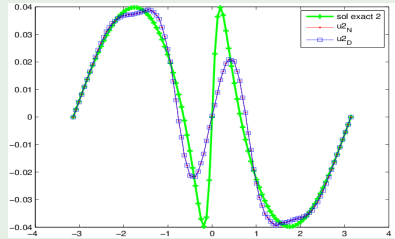


Deuxième cas $a=0.8$

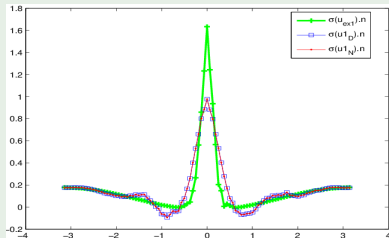
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



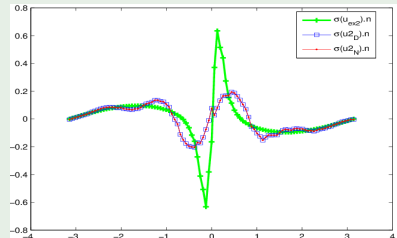
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



La reconstruction de première composante de la contrainte normale sur Γ_u



La reconstruction de deuxième composante de la contrainte normale sur Γ_u



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Résolution de problème de Cauchy complet
- 3 Résolution de Problème de Cauchy incomplet**
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Problème de Cauchy incomplet



E Ahmed, A Ben Abda, F Khayat (in press).

- Reconstruire les mêmes donnée manquantes à partir des données faiblement surdéterminés sur la partie accessible.

Problème de Cauchy incomplet

Pour tout $(T, \phi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_m)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_m)^n$ on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = T & \text{sur } \Gamma_m \\ (\sigma(u) \cdot n) \cdot \tau = \phi & \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right. \quad (3)$$

Avec $(\sigma(u) \cdot n) \cdot \tau$ est la projection de $(\sigma(u) \cdot n)$ sur l'hyperplan tangent de Γ_m et (T, ϕ) sont les données de Cauchy.

Solvabilité du problème

Le problème de complétion des données est :

On cherche $(\xi^*, \eta^*) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_u)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u)^n$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = T, (\sigma(u) \cdot n) \cdot \tau = \phi & \text{sur } \Gamma_m \\ u = \xi^*, \sigma(u) \cdot n = \eta^* & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right. \quad (4)$$

Problème de Dirichlet

$$(P_D) \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u_D + \nabla p_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_D = T & \text{sur } \Gamma_m \\ \sigma(u_D) \cdot n = \eta & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right.$$

Problème de Neumann

$$(P_N) \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u_N + \nabla p_N = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v_N = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_N = \xi & \text{sur } \Gamma_u \\ u_N \cdot n = T \cdot n & \text{sur } \Gamma_m \\ (\sigma(u_N) \cdot n) \cdot \tau = \phi & \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right.$$

Problème de minimisation

On cherche $(\xi^*, \eta^*) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_u)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u)^n$
 tel que :

$$(\xi^*, \eta^*) = \arg \min_{(\tau, \eta)} E(\xi, \eta)$$

- (T, ϕ) une donnée compatible.

Proposition

(ξ^*, η^*) solution du problème de Cauchy



(ξ^*, η^*) solution du problème de minimisation.

Théorème : Condition d'optimalité de premier ordre

Le minimum de E est atteint lorsque :

$$\begin{aligned} u_D &= u_N + cst & \text{sur } \Gamma_u \\ \sigma(u_D) \cdot n &= \sigma(u_N) \cdot n & \text{sur } \Gamma_u \end{aligned}$$

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Résolution de problème de Cauchy complet
- 3 Résolution de Problème de Cauchy incomplet
- 4 Résultats numériques**
 - Solution analytique
 - Solution bruitée
- 5 Conclusion et perspectives

Algorithme de résolution

1 Initialisation:

Pour $k = 0$, on fixe $\xi_0 = \eta_0 = 0$.

2 Résolution : Résoudre (P_D) et (P_N) pour $\eta = \eta_k$ et $\xi = \xi_k$.

3 Calcul du gradient : Calculons (w_D^k, z_D^k) et (w_N^k, z_N^k)

$$\begin{cases} -\nu \Delta w_D^k + \nabla z_D^k = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot w_D^k = 0 & \text{dans } \Omega \\ w_D^k = 0 & \text{sur } \Gamma_m \\ \sigma(w_D^k) \cdot n = \sigma(u_D^k - u_N^k) \cdot n & \text{sur } \Gamma_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\nu \Delta w_N^k + \nabla z_N^k = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot w_N^k = 0 & \text{dans } \Omega \\ w_N^k = u_D^k - u_N^k & \text{sur } \Gamma_u \\ w_N^k \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_m \\ (\sigma(w_N^k) \cdot n) \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_m \end{cases}$$

4 Mise à jour : Mise à jour de ξ_k et η_k :

$$\eta_{k+1} = \eta_k + m w_N^k.$$

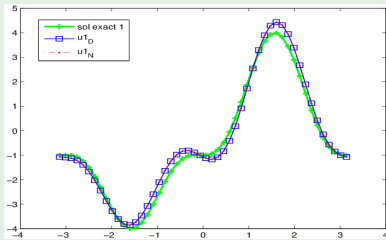
$$\xi_{k+1} = \xi_k + \rho w_D^k.$$

avec $m, \rho \in [-2, 2]$

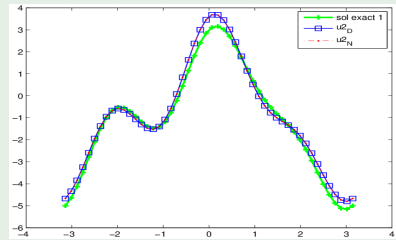
5 Test d'arrêt : $E(\xi_k, \eta_k) < \varepsilon$, où ε est la tolérance.

Premier test

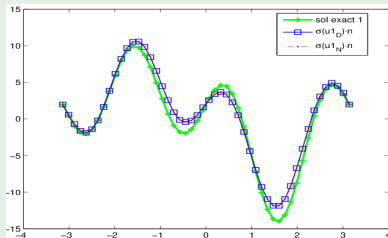
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



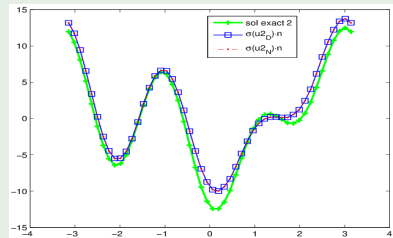
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



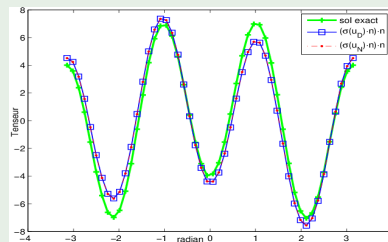
*La reconstruction de première composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



*La reconstruction de deuxième composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



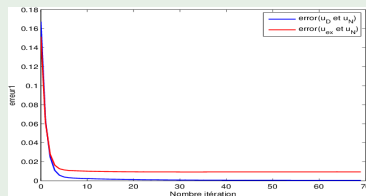
La reconstruction de la composante normale du tenseur de contrainte sur Γ_m



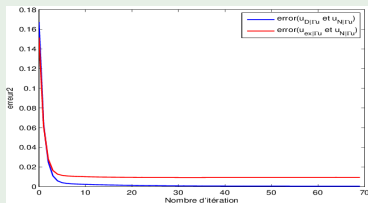
Evolution d'erreurs

$$\begin{aligned} \text{erreur1} &= \frac{\|u_{\text{ex}} - u_i^k\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}^n} \quad i = D, N \\ \text{erreur2} &= \frac{\|u_{\text{ex}}|_{\Gamma_u} - \xi^k\|_{L^2(\Gamma_u)}^n}{\|u_{\text{ex}}|_{\Gamma_u}\|_{L^2(\Gamma_u)}^n} \\ \text{erreur3} &= \frac{\|\sigma(u_{\text{ex}}) \cdot n|_{\Gamma_u} - \eta^k\|_{L^2(\Gamma_u)}^n}{\|\sigma(u_{\text{ex}}) \cdot n|_{\Gamma_u}\|_{L^2(\Gamma_u)}^n} \end{aligned}$$

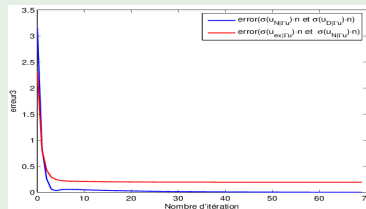
Évolution d'erreur sur Ω



Évolution d'erreur de la vitesse sur Γ_u



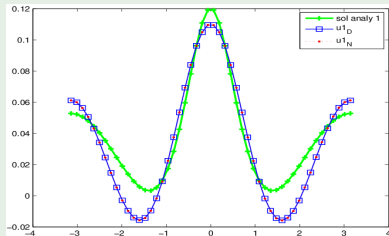
Évolution d'erreur de contrainte normale sur Γ_u



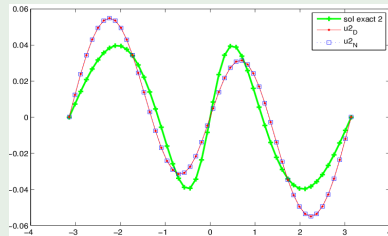
Deuxième test

- L'étude numérique est illustré avec des solutions singulières
 - Cas où $a=0.4$

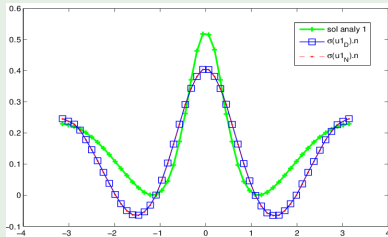
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



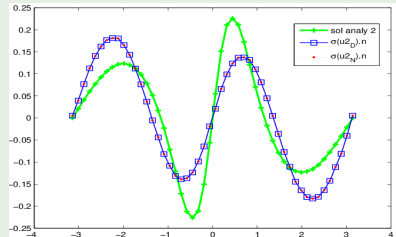
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



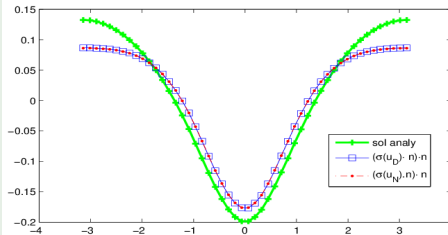
*La reconstruction de première composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



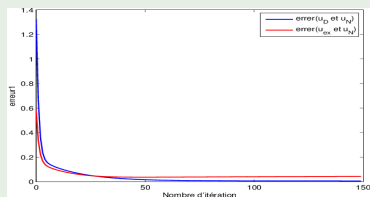
*La reconstruction de deuxième composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



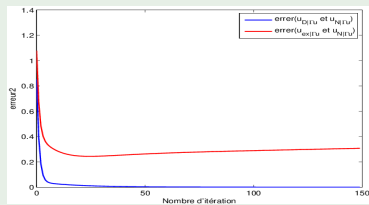
La reconstruction de la composante normale
 du contrainte normale sur Γ_m



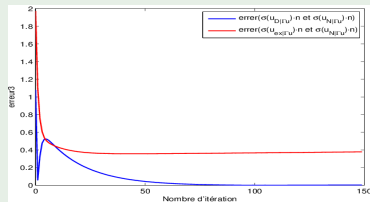
Évolution d'erreur sur Ω



Évolution d'erreur de la vitesse sur Γ_u



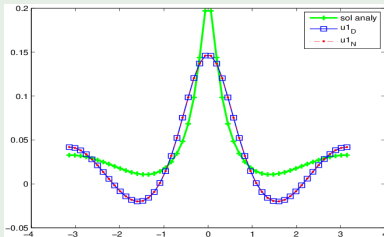
Évolution d'erreur de contrainte normale sur Γ_u



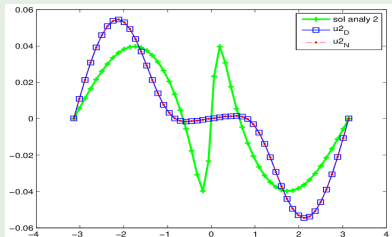
Deuxième test : cas où $a=0.8$

- Cas où $a=0.8$

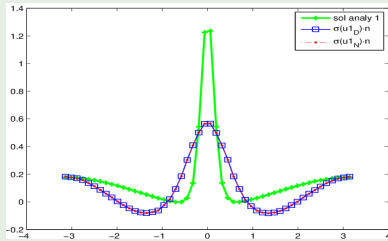
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



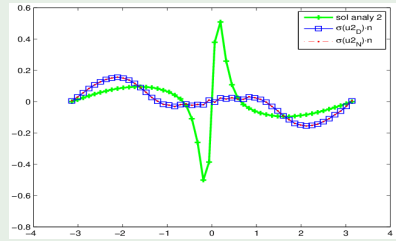
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



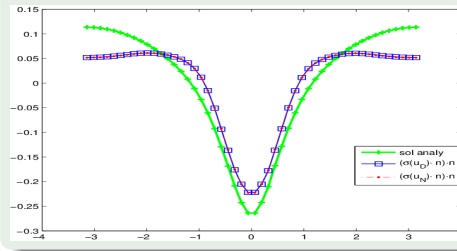
*La reconstruction de première composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



*La reconstruction de deuxième composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*

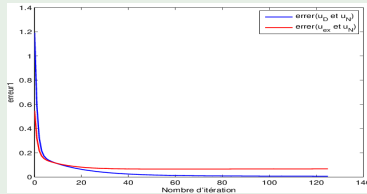


La reconstruction de la composante normale
 du tenseur de contrainte sur Γ_m

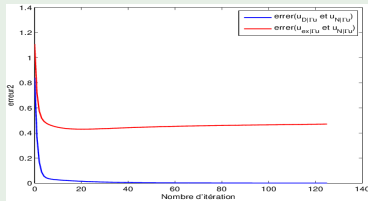


Evolutions d'erreurs

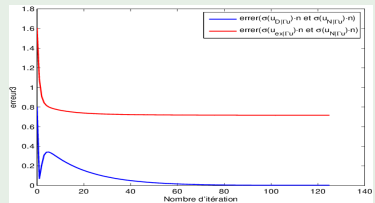
Évolution d'erreur sur Ω



Évolution d'erreur de la vitesse sur Γ_U



Évolution d'erreur de contrainte normale sur Γ_U



Cas des données bruitées

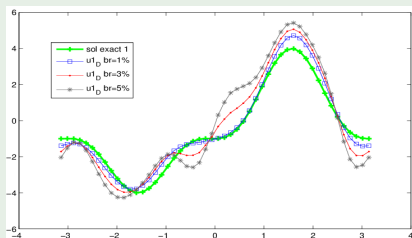
Dans cette partie, on discute une question de robustesse globale de l'algorithme.

$$T^\alpha = T + \alpha\omega \text{ sur } \Gamma_m$$

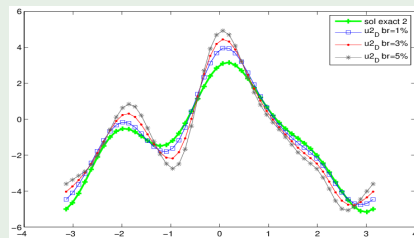
- où α désigne le taux de bruit relatif à la norme $L^2(\Gamma_m)$.
- ω est une fonction aléatoire.

Premier test de donnée bruitée

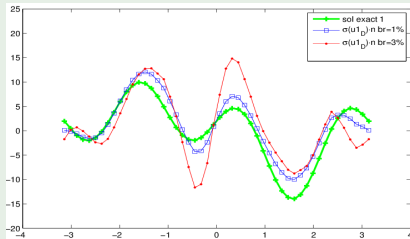
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



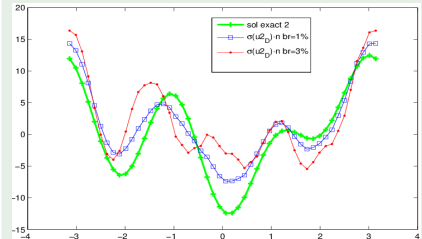
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



*La reconstruction de première composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



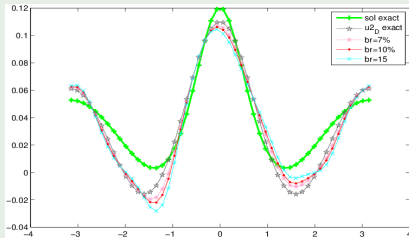
*La reconstruction de deuxième composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



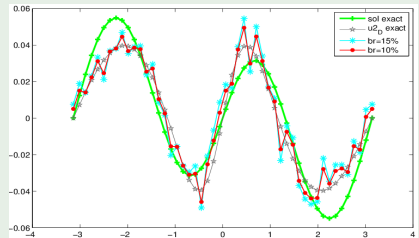
Deuxième test de donnée bruité : cas où $a=0.4$

- Deuxième test ce fait avec de solution singulière
 - Cas d'un point source loin de Γ_u

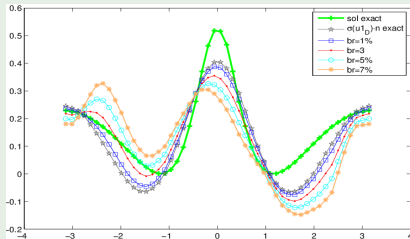
La reconstruction de première composante de la vitesse sur Γ_u



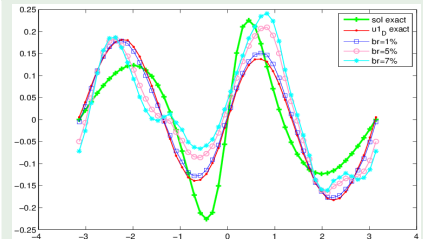
La reconstruction de deuxième composante de la vitesse sur Γ_u



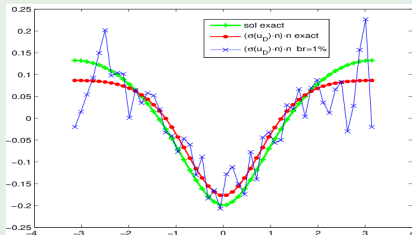
*La reconstruction de première composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



*La reconstruction de deuxième composante
 de la contrainte normale sur Γ_u*



*La reconstruction de la composante
 normale de la contrainte normale sur Γ_m*



Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Résolution de problème de Cauchy complet
- 3 Résolution de Problème de Cauchy incomplet
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Conclusion

- Stabilité de l'algorithme avec des données singulière et polynômiale.
- Nous avons trouvé des résultats satisfaisants pour le cas des données faiblement surdéterminées.
- L'algorithme est robuste, efficace et stable vis à vis des données bruitées

Perspectives

- L'extension de l'étude numérique en dimension 3.
- L'étude du problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes avec des données complètes et incomplètes.
- La résolution du problème de complétion de données par la méthode de factorisation.

Merci pour votre attention !!!